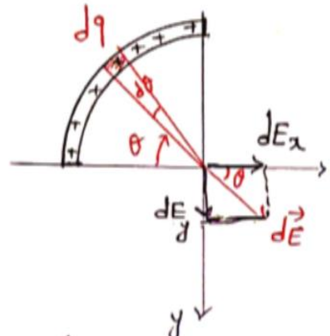
اندازه میدان کل $E=\sqrt{E_x^2+E_y^2}=\sqrt{0+E_y^2}=E_y$

$$\longrightarrow E=\frac{2kq}{\pi R^2}$$

توجه کنید که جهت میدان کل در جهت y است زیرا $E_x=0$

تکلیف ۳ در مثال ۴ فرض کنید سیم نازک به شکل ربع دایره باشد و مسأله را دوباره حل کنید!



توجه کنید که تنها تفاوت ها در اینجا این است که طول سیم $\frac{R\pi}{2}$ است و حدود انتگرال ها باید صفر تا $\frac{\pi}{2}$ باشد.

فصل ۳ قانون گاوس

قانون گاوس یکی از قوانین مهم الکتریسیته است که یکی از کاربردهای آن محاسبه میدان الکتریکی توزیع بارهای بسیار متقارن با محاسبات بسیار کوتاه تر و راحت تری است.

پیش از بیان این قانون ابتدا به بیان چند تعریف می پردازیم

۱- سطح بسته

سطوح را می توان به ۲ دسته تقسیم کرد ۱- سطح باز ۲- سطح بسته

سطح بسته سطحی است که فضا را به دو ناحیه‌ی داخل و خارج تفکیک می کند طوری که اگر بخواهیم یک نقطه در داخل را به وسیله‌ی یک منحنی به نقطه‌ای در خارج متصل کنیم هیچ راهی جز آن که منحنی سطح را قطع کند وجود ندارد.

سطوح سفید رنگ تخم مرغ، سطح یک توپ، استوانه، مکعب همگی می توانند سطح بسته باشند ودر مقابل سطح کاسه یا سطح نیم کره، سطح باز هستند

۲- بردار عنصر سطح

یک سطح بسته سه بعدی مانند شکل روبرو را در نظر بگیرید و سطح را با ترسیم خطوط افقی و قائم، به مساحت های بی نهایت کوچک مربعی شکل تجزیه کنید که به هر یک از آن ها عنصر سطح گفته می شود و مساحت آن ها که می توانند یکسان نباشند را با ΔS نمایش می دهیم

عنصر سطح را مناسب‌تر است یک کمیت برداری بصورت زیر تعریف کنیم:

بردار عنصر سطح برداری است که:

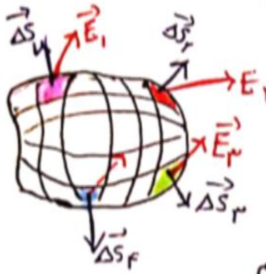
۱- راستای آن عمود بر عنصر سطح است

۲- جهت آن از داخل سطح بسته به طرف خارج است

۳- اندازه آن برابر با مساحت عنصر سطح است

در شکل قبلی بردار $\vec{\Delta S}$ را برای چند عنصر سطح واقع بر سطح بسته نمایش داده‌ایم

توجه کنید هر یک از این عنصر سطح‌های مربعی شکل، تقریباً یک سطح تخت هستند.



۳- انتگرال سطحی برداری میدان الکتریکی $\vec{E}$ روی سطح بسته

یک سطح بسته با شکل دلخواه مطابق شکل روبرو در نظر گرفته و آن را به عناصر سطح مربعی شکل تجزیه کنید.

اکنون فرض کنید در مرکز هر عنصر سطح دو بردار $\vec{E}$ و $\vec{\Delta S}$ را پیدا کنیم و ضرب داخلی $\vec{E}\cdot\vec{\Delta S}$ را محاسبه و این مقادیر $\vec{E}\cdot\vec{\Delta S}$ ها با هم جمع کنیم

$$\vec{E}_1\cdot\vec{\Delta S}_1 + \vec{E}_2\cdot\vec{\Delta S}_2 + \cdots + \vec{E}\cdot\vec{\Delta S}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i\cdot\vec{\Delta S}_i$$

در نهایت فرض کنید حاصل جمع فوق را در حالت حدی که ΔS_i ها بی‌نهایت کوچک و تعداد آنها بی‌نهایت زیاد است. حاصل حدی را به صورت $\oint \vec{E}\cdot d\vec{s}$ نمایش می‌دهیم و آن را انتگرال سطح برداری بردار $\vec{E}$ روی سطح بسته شکل فوق می‌نامند

$$\lim_{\substack{\Delta s_i \to 0 \\ N \to \infty}} \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i\cdot\vec{\Delta S}_i = \oint \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

علامت دایره روی انتگرال تاکید می‌کند که انتگرال روی یک سطح بسته محاسبه می‌شود

اکنون در وضعیتی هستیم که می‌توانیم قانون گاوس را بیان کنیم.

قانون گاوس

برای هر سطح بسته دلخواهی مانند سطح بسته‌ی S در شکل روبرو مطابق قانون گاوس

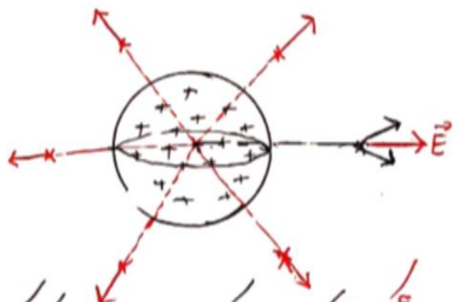
$$\oint_{\text{روی سطح بسته‌ی } S} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

که در آن q بار کل داخل سطح بسته‌ی S و ε_0 گذردهی الکتریکی خلاء است که در فصل اول در بحث قانون کولن معرفی شد

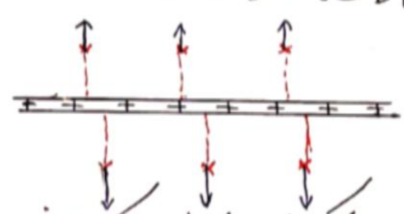
محاسبه‌ی بردار میدان الکتریکی $\vec{E}$ با استفاده از قانون گاوس

با استفاده از قانون گاوس برای توزیع بارهای بسیار متقارن ممکن است بتوانیم بردار میدان الکتریکی $\vec{E}$ را محاسبه کنیم مشروط بر اینکه ۳ شرط زیر برقرار باشد:

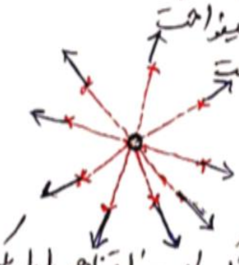
۱- توزیع بار بقدری متقارن باشد که فقط با توجه به این تقارن بتوان جهت بردار $\vec{E}$ را در تمام نقاط فضا دقیقاً پیش بینی کرد



شکل ۱- کره‌ی باردار یکنواخت (میدان الکتریکی در راستای شعاع کره است)

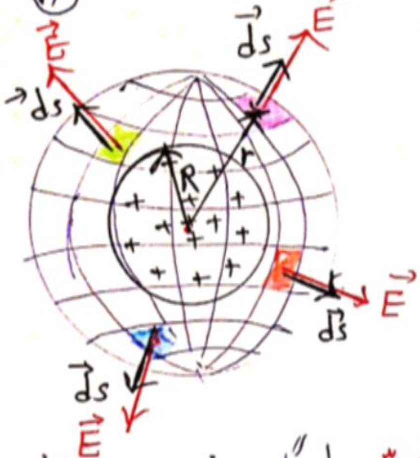


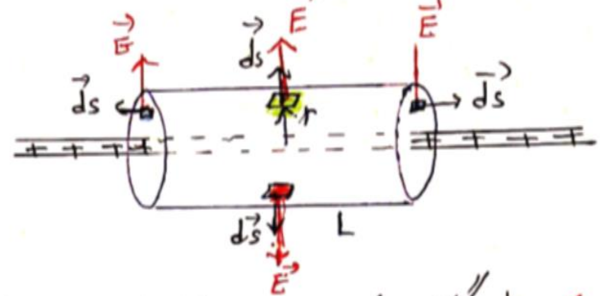
شکل ۲- میله‌ی نازک راست و نامتناهی باردار یکنواخت
میدان در هر نقطه در راستای عمود بر میله است



میله نازک راست نامتناهی با بار یکنواخت
که در این شکل فرض شده میله عمود بر صفحه است

۲- یک سطح بسته ریاضی بتوان به گونه‌ای یافت که میدان الکتریکی همه جا بر آن عمود باشد و یا آنکه بر قسمتی از سطح میدان عمود و بر مابقی سطح میدان مماس باشد. این سطح بسته که در حل مسائل آن را سطح گاوسی می‌نامیم باید طوری در نظر گرفته شود که سطح از نقطه‌ای که می‌خواهیم میدان را در آن محاسبه کنیم بگذرد.





شکل ۴- سطح گاوس مناسب برای خط بار استوانه‌ای است که محور تقارن آن منطبق میله نازک است روی سطح جانبی میدان همه‌جا عمود بر سطح و روی قاعده‌ها میدان مماس بر سطح است.

شکل ۳- سطح گاوس مناسب برای یک کره باردار یکنواخت، کره‌ای هم مرکز با کره باردار است. بردارهای $\vec{E}$ و $\vec{ds}$ همه‌جا هم‌جهت هستند

۳- میدان روی آن قسمت از سطح بسته گاوس که عمود بر سطح است با توجه به تقارن توزیع بار اندازه ثابتی داشته باشد

اکنون در قالب مثال‌های زیر نشان می‌دهیم که در صورت برقراری ۳ شرط فوق چگونه به کمک قانون گاوس می‌توان میدان الکتریکی را محاسبه کرد

یادآوری

ضرب داخلی دو بردار $\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$

اگر دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ بر هم عمود باشند $\theta=90^\circ$ بنابراین $\vec{A}\cdot\vec{B}=0$ زیرا $\cos 90^\circ=0$

اگر دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ هم‌جهت باشند $\theta=0$ بنابراین $\vec{A}\cdot\vec{B}=AB$ زیرا $\cos 0=1$

مثال ۱- بار الکتریکی q بطور یکنواخت در داخل حجم کره‌ای به شعاع R بطور یکنواخت توزیع شده است. میدان الکتریکی را در نقطه‌ای به فاصله r از مرکز کره بار و خارج از آن محاسبه کنید

با توجه به مطالب فوق واضح است که شرایط ۱ تا ۳ برای محاسبه میدان حاصل از کره باردار یکنواخت برقرار است. با توجه به شکل ۱ میدان در هر نقطه از فضا در راستای شعاع کره گذرنده از آن نقطه است و مطابق شکل ۳ سطح گاوس را کره‌ای به شعاع r هم مرکز با کره بار در نظر می‌گیریم (شکل این مثال همان شکل ۳ است که از ترسیم مجدد آن خودداری می‌شود)

مطابق قانون گاوس می توان نوشت

$$\oint_{\text{روی سطح کره به شعاع } r} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

با توجه به شکل ۳ بردارهای $\vec{E}$ و $d\vec{s}$ همه جا روی سطح گاوس هم جهت هستند پس $\vec{E}\cdot d\vec{s} = E\,ds$

$$\longrightarrow \oint_{\text{روی سطح کره به شعاع } r} E\,ds = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

چون اندازهٔ میدان روی سطح گاوس به دلیل تقارن ثابت است

$$E\oint_{\text{روی کره به شعاع } r} ds = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$\oint ds$ به معنی حاصل جمع مساحت های عنصرهای سطح مربعی شکل روی سطح گاوس است.
واضح است که این حاصل جمع برابر با مساحت کره به شعاع r یعنی برابر با $4\pi r^2$ است

$$E\times 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \longrightarrow E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

مثال ۲- بار الکتریکی بطور یکنواخت مطابق شکل ۴ بر روی یک میلهٔ نازک، راست و نامتناهی توزیع شده است. اگر بار در واحد طول میله λ باشد میدان الکتریکی را در نقطه ای به فاصله r از میله با استفاده از قانون گاوس حساب کنید

سطح گاوس را استوانه ای به طول L و به شعاع r در نظر می گیریم به گونه ای که میلهٔ نازک از مرکز یک قاعدهٔ آن وارد و از مرکز قاعدهٔ دیگر خارج شود (شکل این مثال نیز همان شکل ۴ است که از ترسیم مجدد آن خودداری می کنیم) مطابق قانون گاوس:

$$\oint_{\text{روی سطح گاوس}} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

که در آن q بار داخل سطح گاوس یعنی بار داخل استوانه است

انتگرال سمت چپ که روی کل استوانه باید محاسبه شود را بصورت زیر به ۳ انتگرال تبدیل می کنیم

$$\int_{\text{روی قاعدهٔ سمت چپ}} \vec{E}\cdot d\vec{s} + \int_{\text{روی قاعده سمت راست}} \vec{E}\cdot d\vec{s} + \int_{\text{روی سطح جانبی}} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

حاصل انتگرال اول و دوم صفر است زیرا روی قاعده ها $\vec{E}$ و $d\vec{s}$ عمود بر هم هستند و $\vec{E}\cdot d\vec{s}=0$
روی سطح جانبی $\vec{E}$ و $d\vec{s}$ هم جهت هستند $\vec{E}\cdot d\vec{s} = E\,ds$

$$\longrightarrow \int_{\text{روی سطح جانبی}} E\,ds = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

چون تمام نقاط سطح جانبی از میله به یک فاصله هستند بنابر تقارن E روی سطح جانبی ثابت است.

$$E\int_{\text{روی سطح جانبی}} ds = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

واضح است که $\int ds$ مساحت جانبی استوانه خواهد شد

$$E \times 2\pi r L = \frac{q}{\varepsilon_0} \longrightarrow E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r L}$$

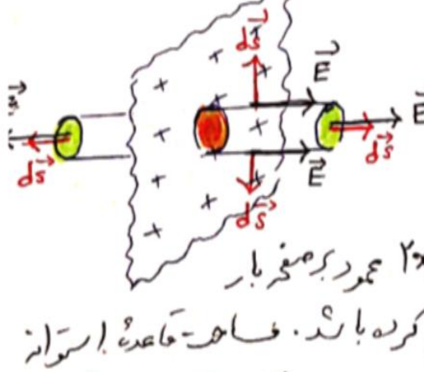
همانطور که گفتیم q بار داخل سطح گاوس یعنی بار داخل استوانه است. چون فقط طول L از میله‌ی نازک داخل استوانه واقع بار داخل استوانه در واقع بار واقع بر طول L میله است

طول	بار
1	λ
L	$q=?$

$$\longrightarrow q = \lambda L$$

$$\longrightarrow E = \frac{\lambda \cancel{L}}{2\pi\varepsilon_0 r \cancel{L}} = \boxed{\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}}$$

مثال: بار الکتریکی با چگالی یکنواخت σ بر روی یک صفحه‌ی نازک نامتناهی توزیع شده است. میدان الکتریکی را در نقطه‌ای به فاصله x از صفحه محاسبه کنید



در فصل قبل دیدیم که میدان الکتریکی صفحه بار یکنواخت نامتناهی عمود بر صفحه و یکنواخت است. سطح گاوس را استوانه‌ای به طول $2x$ عمود بر صفحه بار در نظر می‌گیریم بطوریکه صفحه‌ی بار استوانه را از وسط عمودی قطع کرده باشد. مساحت قاعده‌ی استوانه گاوس را A فرض می‌کنیم

قانون گاوس: $\oint \vec{E}\cdot\vec{ds} = \frac{q}{\varepsilon_0}$

$$\longrightarrow \int_{\text{روی قاعده‌ی سمت چپ}} \vec{E}\cdot\vec{ds} + \int_{\text{روی قاعده‌ی سمت راست}} \vec{E}\cdot\vec{ds} + \int_{\text{روی سطح جانبی}} \vec{E}\cdot\vec{ds} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

بردارهای $\vec{E}$ و $\vec{ds}$ روی قاعده‌ها مطابق شکل فوق هم جهت هستند اما بر روی سطح جانبی برهم عمود هستند بنابراین حاصل انتگرال سوم صفر است.

(۱۹)

$$\rightarrow \underset{\text{روی قاعده سمت چپ}}{\int E\,ds} + \underset{\text{روی قاعده سمت راست}}{\int E\,ds} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

که در آن q بار داخل سطح گاوس است. چون E روی قاعده‌ها (و در واقع در همه فضا) اندازه ثابتی دارد

$$\rightarrow E \underset{\text{روی قاعده سمت چپ}}{\int ds} + E \underset{\text{روی قاعده سمت راست}}{\int ds} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$EA + EA = \frac{q}{\varepsilon_0} \rightarrow ۲EA = \frac{q}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \frac{q}{۲\varepsilon_0 A}$$

که در آن A مساحت هر یک از قاعده‌هاست. اما توجه کنید چون استوانه عمود بر صفحه است مساحتی از صفحه‌ی بار که داخل استوانه قرار می‌گیرد مساحتی برابر با قاعده یعنی A است

مساحت	بار
۱	σ
A	$q = ?$

$\longrightarrow$ بار داخل سطح گاوس $q = \sigma A$

$$\rightarrow E = \frac{\sigma \cancel{A}}{۲\varepsilon_0 \cancel{A}} \rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{۲\varepsilon_0}}$$